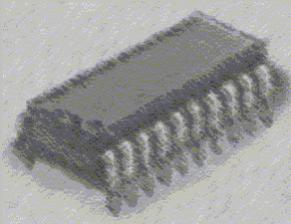


Tema 3. La Unidad Aritmético-Lógica

*Arquitectura de
Computadores I*



I. T. Informática de Sistemas

Curso 2009-2010

Tema 3:

Transparencia: 2 / 53

La Unidad Aritmético-Lógica

Índice

- Estructura e implementación de la ALU
- Circuitos y algoritmos para la ALU:
 - Operadores lógicos y de desplazamiento
 - Operaciones sobre el signo
 - Suma en coma fija
 - Suma en coma flotante
 - Dígitos de guarda
 - Técnicas de redondeo
 - Multiplicación y división en coma fija
 - Multiplicación y división en coma flotante
- La ALU en la arquitectura von Neuman: camino de datos y unidades funcionales
- La unidad de ejecución del MC68000
- Bibliografía



Departamento de Automática
Área de Arquitectura y Tecnología de Computadores

Arquitectura de Computadores I
I. T. Informática de Sistemas

Estructura e implementación de la ALU (I)

- **Unidad aritmético-lógica (ALU):** es el conjunto de operadores disponibles en un computador
- Formada por:
 - Operadores: aritméticos, lógicos y de desplazamiento
 - Registros para almacenar datos temporales
 - Registro de estado: conjunto de *flags* que indican situaciones ocurridas al operar
 - Registro contador de programa
 - Registro de direcciones de interrupción
- Tipos de ALU:
 - Coma fija
 - Coma flotante



Estructura e implementación de la ALU (y II)

Clasificación de los operadores:

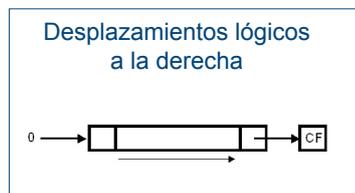
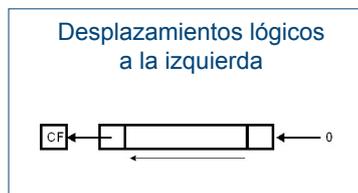
Ámbito de aplicación	General Especializado
Realización	Combinacional Secuencial
Número de operandos	Monádico Diádico
Paralelismo	Serie o de dígito Paralelo o de vector
Operación	De desplazamiento Lógico Aritmético
Tecnología empleada	MOS Bipolar



Circuitos y algoritmos para la ALU (I) Operaciones de desplazamiento (I)

- **Desplazamientos lógicos:**

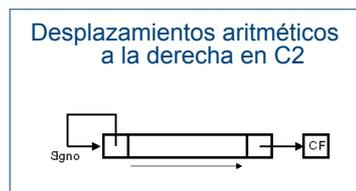
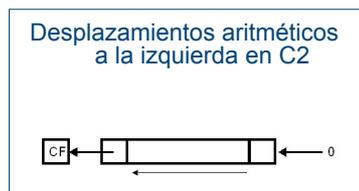
- Independientemente del sistema de representación de los operandos se introducen ceros por la derecha o por la izquierda según se trate de un desplazamiento a la izquierda o a la derecha, respectivamente
- El bit o los bits que salen suelen copiarse en el indicador de acarreo (el último que ha salido es el que queda)



Circuitos y algoritmos para la ALU (II) Operaciones de desplazamiento (II)

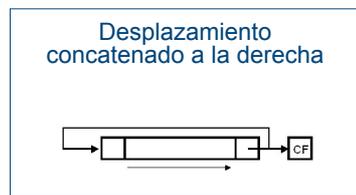
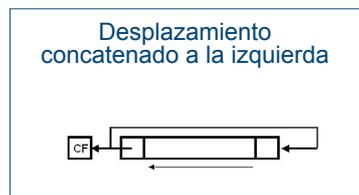
- **Desplazamientos aritméticos:**

- Equivalen a multiplicaciones y divisiones por dos, según sean hacia la izquierda o a la derecha, respectivamente.
- El sistema de representación de los operandos debe tenerse en cuenta si los operandos tienen signo
- El bit o los bits que salen suelen copiarse en el indicador de acarreo (el último que ha salido es el que queda)



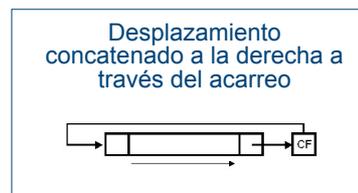
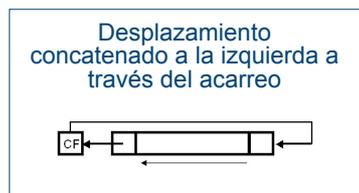
Circuitos y algoritmos para la ALU (III) Operaciones de desplazamiento (III)

- **Desplazamientos circulares:**
 - Los bits que salen por un extremo entran por el otro
 - El bit o los bits que salen suelen copiarse en el indicador de acarreo (el último que ha salido es el que queda)



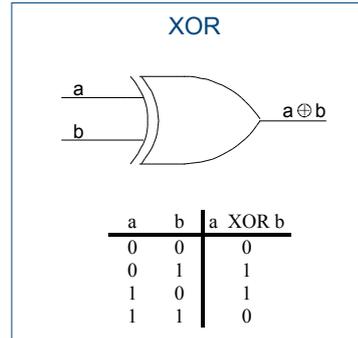
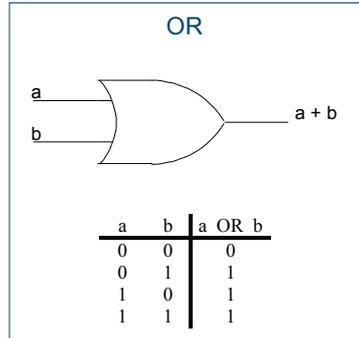
Circuitos y algoritmos para la ALU (IV) Operaciones de desplazamiento (y IV)

- **Desplazamientos circulares a través del flag de acarreo:**
 - Los bits que salen por un extremo entran por el otro
 - El bit o los bits que salen suelen copiarse en el indicador de acarreo

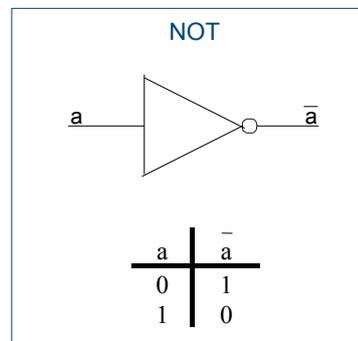
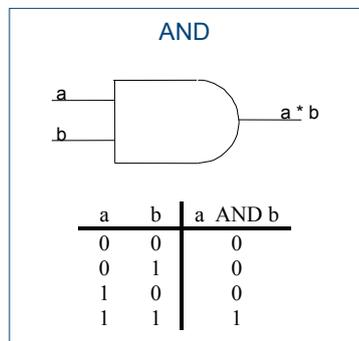


Circuitos y algoritmos para la ALU (V) Operaciones Lógicas (I)

- Las operaciones lógicas realizan la operación sobre cada uno de los bits del operando o de los operandos

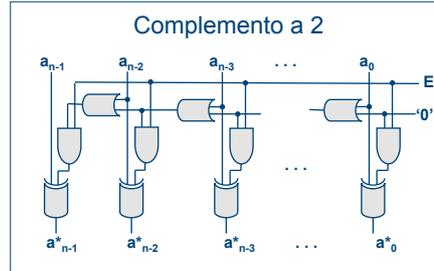
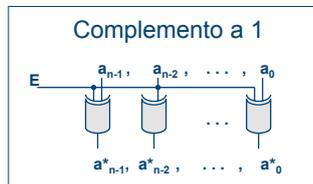
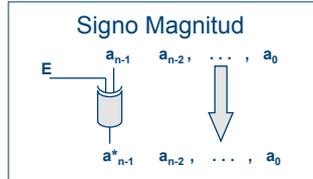


Circuitos y algoritmos para la ALU (VI) Operaciones Lógicas (y II)



Circuitos y algoritmos para la ALU (VII) Operaciones Aritméticas (I)

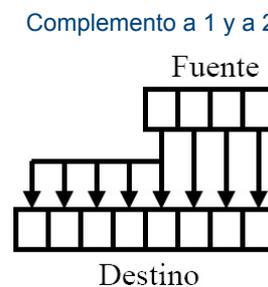
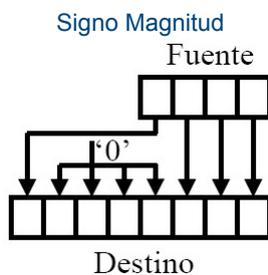
- Operaciones sobre el signo. Cambio de signo



Circuitos y algoritmos para la ALU (VIII) Operaciones Aritméticas (II)

- Operaciones sobre el signo. Extensión de signo.

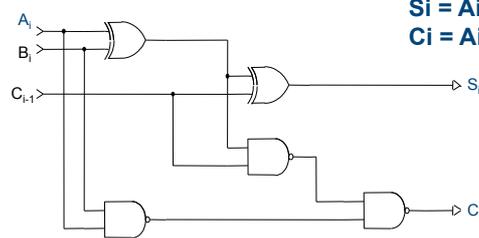
Es cuando se pasa de un operando de n bits a otro de m bits con $m > n$. Consiste en ver como "rellenar" los bits que sobran conservando el signo



Circuitos y algoritmos para la ALU (IX) Operaciones Aritméticas (III)

- **Suma:** la suma es la operación más importante de todas, ya que:
 - Se emplea para el cálculo de la dirección de la siguiente instrucción
 - Se utiliza para el cálculo de las direcciones a los operandos
 - Otras operaciones la emplean: multiplicación, división

Sumador elemental de un bit



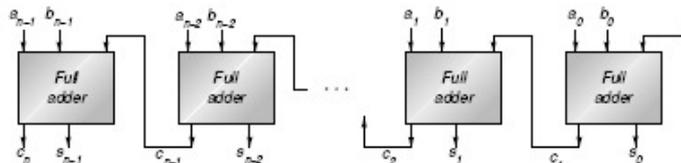
$$S_i = A_i \oplus B_i \oplus C_{i-1}$$

$$C_i = A_i B_i + B_i C_{i-1} + A_i C_{i-1}$$



Circuitos y algoritmos para la ALU (X) Operaciones Aritméticas (IV)

- **Sumador con propagación de acarreo de n bits empleando sumadores completos (full adder) de 1 bit**

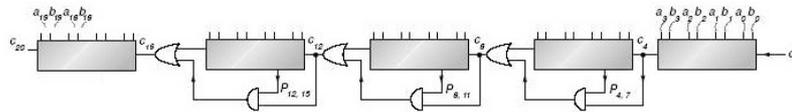


- **Problemas:**
 - Muy lento porque debe propagarse el acarreo desde el primer sumador al segundo, del segundo al tercero y así hasta que llegue al último sumador
 - El retardo es $2 \cdot n \cdot r$ ya que es el máximo retardo de niveles de puertas que tiene que pasar para obtener el acarreo es de dos, n es el número de sumadores y r el retardo de las puertas



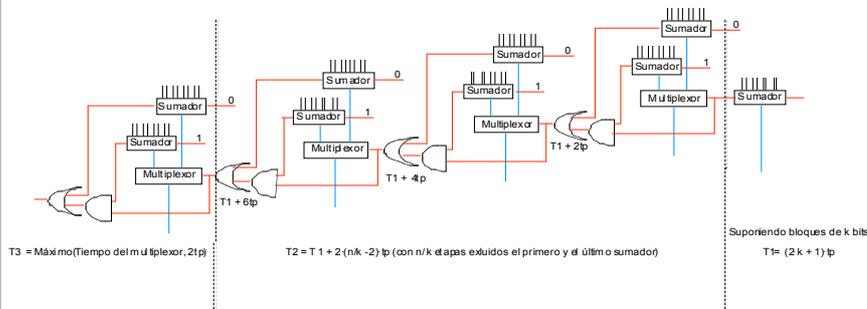
Circuitos y algoritmos para la ALU (XIII) Operaciones Aritméticas (VII)

- **Aceleración de la suma. Salto de acarreo (CSK)**
 - Es un sumador intermedio entre uno de propagación y uno de anticipación.
 - Se basa en calcular las P_i que son de cálculo más sencillo.
- **Para un sumador de salto de acarreo de K bits:**
 - Primer propagador: $2k + 1$ (el primer sumador un nivel más)
 - Número de puertas: $2(n/k - 2)$
 - Último propagador: $2k$
 - Total: número niveles = $4k + 2n/k - 3$
 - En nuestro ejemplo $n = 20, K = 4 \rightarrow$ num. Niveles = 21



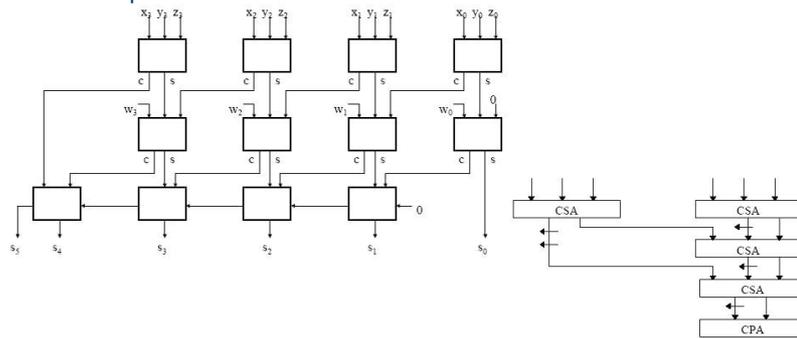
Circuitos y algoritmos para la ALU (XIV) Operaciones Aritméticas (VIII)

- **Aceleración de la suma. Selección de acarreo**
 - Se basa en duplicar el hardware. Se suman los bits suponiendo acarreo cero y acarreo 1 y mediante multiplexores se elige el resultado correcto una vez conocido el acarreo



Circuitos y algoritmos para la ALU (XV) Operaciones Aritméticas (IX)

- **Aceleración de la suma: sumador sin propagación (CSA)**
 - Reduce el cálculo del tiempo casi a la mitad pero solamente es útil para más de 3 sumandos



Circuitos y algoritmos para la ALU (XVI) Operaciones Aritméticas (X)

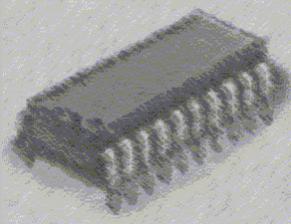
- **Tiempo de proceso y espacio requerido por cada uno de los distintos tipos de sumadores**

Sumador	Tiempo	Espacio
Propagación	$O(n)$	$O(n)$
Anticipación	$O(\log n)$	$O(n \log n)$
Salto	$O(\sqrt{n})$	$O(n)$
Selección	$O(\sqrt{n})$	$O(n)$



Tema 3. La Unidad Aritmético-Lógica

*Arquitectura de
Computadores I*



I. T. Informática de Sistemas

Curso 2008-2009

Tema 3:

Transparencia: 22 / 53

La Unidad Aritmético-Lógica

Índice

- Estructura e implementación de la ALU
- Circuitos y algoritmos para la ALU:
 - Operadores lógicos y de desplazamiento
 - Operaciones sobre el signo
 - Suma en coma fija
 - Suma en coma flotante
 - Dígitos de guarda
 - Técnicas de redondeo
 - Multiplicación y división en coma fija
 - Multiplicación y división en coma flotante
- La ALU en la arquitectura von Neuman: camino de datos y unidades funcionales
- La unidad de ejecución del MC60888
- Bibliografía

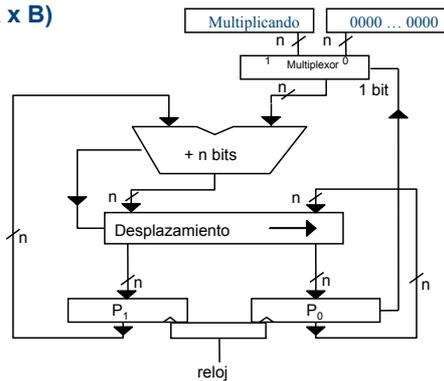


Departamento de Automática
Área de Arquitectura y Tecnología de Computadores

Arquitectura de Computadores I
I. T. Informática de Sistemas

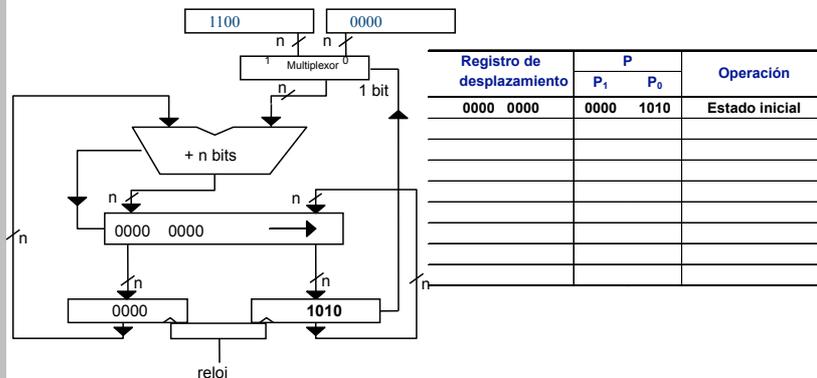
Circuitos y algoritmos para la ALU (XVII) Operaciones Aritméticas (XI)

- Multiplicación. Algoritmo de suma desplazamiento (A x B)
- Inicialmente $P_0 = B$
- Sólo números sin signo



Circuitos y algoritmos para la ALU (XVIII) Operaciones Aritméticas (XII)

- Ejemplo A = 1100 y B = 1010

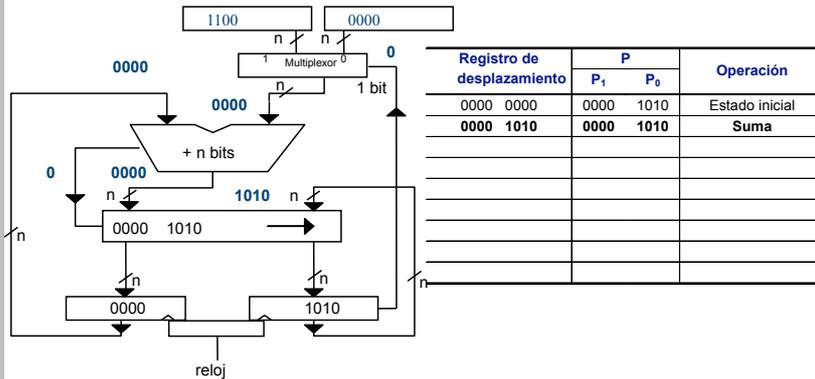


Registro de desplazamiento	P		Operación
	P ₁	P ₀	
0000 0000	0000	1010	Estado inicial



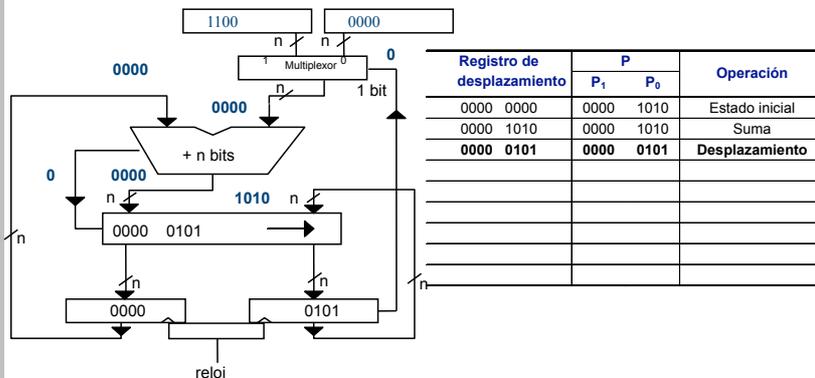
Circuitos y algoritmos para la ALU (XIX) Operaciones Aritméticas (XIII)

- Ejemplo A = 1100 y B = 1010



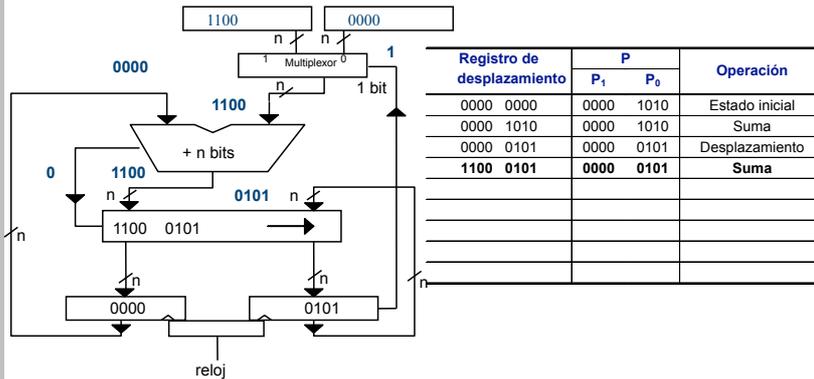
Circuitos y algoritmos para la ALU (XX) Operaciones Aritméticas (XIV)

- Ejemplo A = 1100 y B = 1010



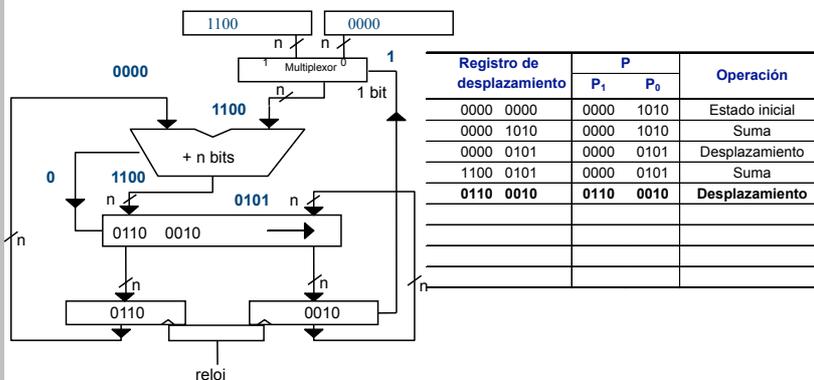
Circuitos y algoritmos para la ALU (XXI) Operaciones Aritméticas (XV)

- Ejemplo A = 1100 y B = 1010



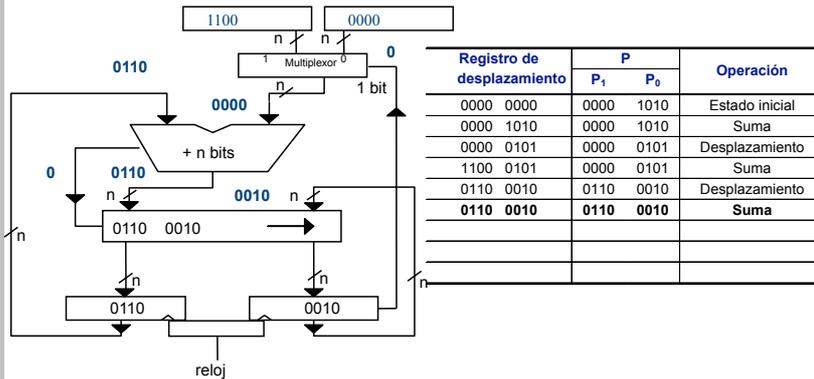
Circuitos y algoritmos para la ALU (XXII) Operaciones Aritméticas (XVI)

- Ejemplo A = 1100 y B = 1010



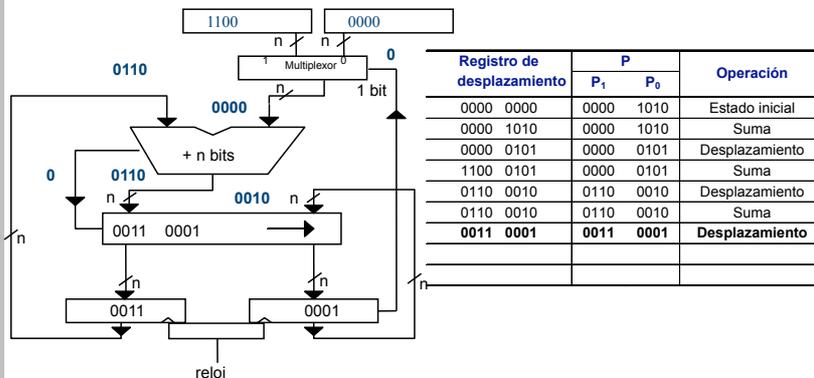
Circuitos y algoritmos para la ALU (XXIII) Operaciones Aritméticas (XVII)

- Ejemplo A = 1100 y B = 1010



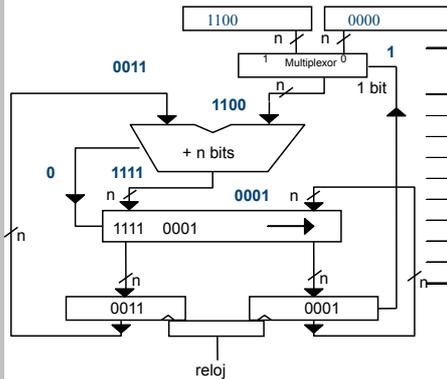
Circuitos y algoritmos para la ALU (XXIV) Operaciones Aritméticas (XVIII)

- Ejemplo A = 1100 y B = 1010



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXV) Operaciones Aritméticas (XIX)

- Ejemplo A = 1100 y B = 1010

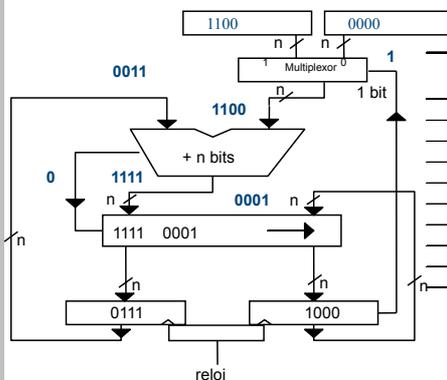


Registro de desplazamiento	P		Operación
	P ₁	P ₀	
0000 0000	0000	1010	Estado inicial
0000 1010	0000	1010	Suma
0000 0101	0000	0101	Desplazamiento
1100 0101	0000	0101	Suma
0110 0010	0110	0010	Desplazamiento
0110 0010	0110	0010	Suma
0011 0001	0011	0001	Desplazamiento
1111 0001	0011	0001	Suma



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXVI) Operaciones Aritméticas (XX)

- Ejemplo A = 1100 y B = 1010



Registro de desplazamiento	P		Operación
	P ₁	P ₀	
0000 0000	0000	1010	Estado inicial
0000 1010	0000	1010	Suma
0000 0101	0000	0101	Desplazamiento
1100 0101	0000	0101	Suma
0110 0010	0110	0010	Desplazamiento
0110 0010	0110	0010	Suma
0011 0001	0011	0001	Desplazamiento
1111 0001	0011	0001	Suma
0111 1000	0111	1000	Desplazamiento



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXVII) Operaciones Aritméticas (XXI)

- **Ajustes para operar con números representados en complemento a 1 y complemento a 2 (con signo)**
 - **Complemento a 2:** si el multiplicador es negativo, cuando llegue el 1 del bit más significativo al multiplexor, entonces, restar A
 - **Complemento a 1:** si el multiplicador es negativo, cuando llegue el 1 del bit más significativo al multiplexor, entonces, restar A. Y además, en la fase de inicialización P1 y el registro de desplazamiento toman el valor inicial del multiplicando



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXVIII) Operaciones Aritméticas (XXII)

- **Multiplicación. Algoritmo de Booth (C2)**
 - Se trata de evitar las sumas de cero que consumen ciclos de máquina y no aportan nada al cálculo puesto que solamente se desplazaría luego el resultado.
 - Emplea la recodificación del multiplicador buscando cadenas de 1's y afectándoles del peso de ese 1 ó del 0

- **A = 1011, B = 0110**
- **A x B = +Ax2³ -Ax2¹**

$$\begin{array}{r}
 0001010 \\
 1011000 + \\
 \hline
 1100010
 \end{array}$$

X_i	X_{i-1}	significado	acción asociada	Y_i
0	0	cadena de 0s	desplazar	0
1	1	cadena de 1s	desplazar	0
1	0	principio de cadena de 1s	restar y desplazar	-1
0	1	fin de cadena de 1s	sumar y desplazar	1



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXIX)

Operaciones Aritméticas (XXIII)

- **División. Algoritmo de división con restauración (sin signo)**
- **Dividendo parcial inicial:** tomar tantos bits del dividendo como tenga el divisor.
- Garantizar que tanto el dividendo como el divisor son positivos (si empiezan por 1 añadirle un cero a la izquierda)
- Sumar al dividendo el complemento a 2 del divisor
 - Si el resultado es positivo:
 - Bajar un nuevo bit del dividendo
 - Añadir 1 al cociente
 - Si el resultado es negativo:
 - Sumar de nuevo el divisor
 - Bajar un nuevo bit del dividendo
 - Añadir un 0 al cociente
- Repetir hasta que no queden más bits para bajar del dividendo



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXX)

Operaciones Aritméticas (XXIV)

- **División. Algoritmo de división con restauración (sin signo)**
 - A = 0100011, B = 0011, Cociente = 1011, Resto = 0010

$$\begin{array}{r}
 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \quad | \ 0011 \\
 +1\ 1\ 0\ 1 \quad \downarrow \\
 \underline{1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0} \\
 +\ 1\ 1\ 0\ 1 \\
 1\ 1\ 1\ 1 \\
 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \quad \leftarrow \text{Restauración} \\
 +\ 1\ 1\ 0\ 1 \\
 \underline{1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1} \\
 +\ 1\ 1\ 0\ 1 \\
 \underline{1\ 0\ 0\ 1\ 0}
 \end{array}$$



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXXI) Operaciones Aritméticas (XXV)

- **División. Algoritmo de división sin restauración (sin signo)**
- **Dividendo parcial inicial:** tomar tantos bits del dividendo como tenga el divisor.
- Garantizar que tanto el dividendo como el divisor son positivos (si empiezan por 1 añadirle un cero a la izquierda)
- Sumar al dividendo el complemento a 2 del divisor
 - Si el resultado es positivo:
 - Bajar un nuevo bit del dividendo
 - Añadir 1 al cociente
 - Si el resultado es negativo:
 - Sumar de nuevo el divisor en vez del complemento al bajar el siguiente bit
 - Bajar un nuevo bit del dividendo
 - Añadir un 0 al cociente
- Repetir hasta que no queden más bits para bajar del dividendo



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXXII) Operaciones Aritméticas (XXVI)

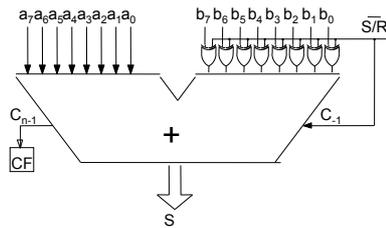
- **División. Algoritmo de división sin restauración (sin signo)**
 - A = 0100011, B = 0011, Cociente = 1011, Resto = 0010

$$\begin{array}{r}
 0100011 \quad |0011 \\
 +1101 \quad \downarrow \\
 \hline
 00010 \\
 +1101 \quad \downarrow \\
 \hline
 11111 \\
 +0011 \quad \downarrow \\
 \hline
 \color{red}{1}00101 \\
 +1101 \\
 \hline
 \color{red}{1}0010
 \end{array}$$



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXXV) Circuitos (II)

- Sumador-restador en complemento a 2

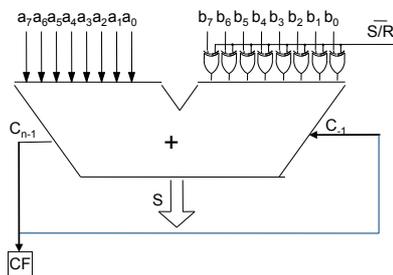


$$\text{Desbordamiento} = c_{n-1} \oplus c_{n-2}$$



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXXVI) Circuitos (III)

- Sumador-restador en complemento a 1



$$\text{Desbordamiento} = c_{n-1} \oplus c_{n-2}$$



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXXIX) Suma-resta en coma flotante (I)

- **Para sumar o restar números en coma flotante se debe:**
 1. Separar las mantisas de los exponentes
 2. Comparar los exponentes y:
 - Guardar el exponente mayor que será el del resultado salvo que el número salga desnormalizado
 - Restar del exponente mayor el menor. Dicho número será el número de veces que se tendrá que desplazar a la derecha la mantisa menor
 3. Desplazar la mantisa menor a la derecha para alinear las mantisas
 4. Realizar la suma o la resta
 5. Comprobar si el número está normalizado y en caso de que no lo esté, normalizarlo
 6. Realizar el redondeo si es preciso



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXXX) Suma-resta en coma flotante (y II)

- **Ejemplo de suma en coma flotante:**
 - Sean A y B dos números expresados en coma flotante. Exponente en exceso 2^{n-1} con 8 bits y mantisa también con 8 bits, expresada en complemento a 2, normalizada y sin bit implícito
 - EA = 1000 0100 MA = 0100 0100
 - EB = 1000 0011 MB = 0111 0000
 - Comparamos exponentes EA(4) > EB(3). Exponente resultado EA
 - Desplazamos MB EA-EB veces, es decir, 4 – 3 = 1
 - 0100 0100
 - $\begin{array}{r} 0011\ 1000\ + \\ \hline 0111\ 1100 \end{array}$
 - ER = 1000 0100 MR = 0111 1100



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXXXI) Dígitos de guarda

- Los bits de guarda se añaden y se emplean únicamente dentro de la Unidad Aritmético-Lógica.
- Se emplean para aumentar la precisión de los resultados y permitir el redondeo y la normalización de manera correcta.
- Normalmente se emplean 2 bits de guarda y un bit retenedor que se añaden al final del número:

$$b_8 b_7 b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0 \quad b_{g1} \quad b_{g2} \quad b_r$$

- Los bits b_8 a b_0 son un dato de 8 bits
- b_{g1} es el primer bit de guarda que se emplea para la normalización
- b_{g2} es el segundo bit de guarda que se emplea para el redondeo
- b_r es el bit retenedor que se emplea para no perder la precisión en la operación de resta y que se mantiene a 1 al pasar un 1 por él



Circuitos y algoritmos para la ALU (XXXXII) Técnicas de redondeo

- Al pasar de la ALU a los registros o la memoria, los bits de guarda y el bit retenedor, tienen que eliminarse por lo que se deberán tener en cuenta para mejorar la precisión del resultado
- Existen varias técnicas de redondeo entre las que destacan:
 - **Truncación:** se eliminan los bits de guarda y el bit retenedor
 - **Forzar a 1 el LSB:** se pone a 1 el bit menos significativo del resultado y se truncan los bits de guarda
 - **Redondeo al más próximo:** es la más difícil de implementar pero la que mejor resultado proporciona. Si supera la mitad del valor de los bits de guarda se suma uno al resultado. Si no llega a la mitad, se trunca. En el caso de que sea la mitad, se fuerza a par.
 - Para 3 bits de guarda las combinaciones 000, 001, 010, 011 truncan. Con 101, 110 y 111 se sumaría 1 al resultado. La combinación 100 sumará 1 si el LSB es 1 ó truncan si el LSB es 0



ALU y Arquitectura Von Neumann (I) Camino de datos

- El órgano aritmético de la arquitectura von Neumann se denomina camino de datos o *datapath*
- Consta de: unidades aritmético-lógicas, desplazadores, registros y caminos de comunicación entre ellas
- El camino de datos contiene el estado del computador
- También contiene el registro contador de programa CP y el registro de direcciones de interrupción
- El camino de datos influye en el coste del procesador, aproximadamente necesita la mitad de los transistores y la mitad del área de silicio del procesador
- La duración del ciclo de reloj está determinada por los circuitos más lentos por lo que en el procesador es el camino de datos el que hace de cuello de botella
- Los pasos clave para diseñar el camino de datos son:
 - Elegir el número de puertos del banco de registros
 - Seleccionar el tipo de ALU o de ALUs

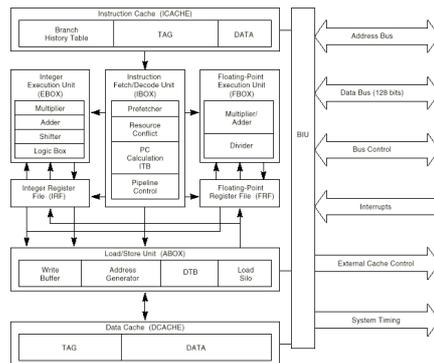


ALU y Arquitectura Von Neumann (II) Camino de datos. Registro de estado

- Al realizar operaciones aritméticas, existen una serie de biestables de estado asociados a ellas y que se suelen recoger en un registro de estado
- El objetivo es guardar constancia de algunas características del resultado de las operaciones realizadas
- Los biestables de estado más frecuentes son:
 - Cero, signo, desbordamiento y acarreo
 - Paridad del resultado, acarreo BCD
- Condiciones de excepción. Algunas de ellas se basan en el contenido de los biestables de estado: desbordamiento.



Ejemplo de hardware real (I) Alpha 21064. Aceleración de la suma (I)



Unidad de cálculo entero (Ebox)

Contiene un camino de datos de 64 bits

- Adder
- Logic box
- Barrel shifter
- Bypasses
- Integer multiplier
- Archivo de registros con 32 registros de 64 bits, 4 ports de lectura y 2 de escritura.

Unidad de cálculo de Punto Flotante (Fbox)

Contiene:

- Multiplicador/Sumador
- Divisor
- Un archivo de registros de 32 entradas, con registros de punto flotante de 64 bits
- Un registro de control accesible por el usuario (FPCR) que contine:
 - Controles para modos de redondeo dinámico
 - Información del flag de excepciones

Acepta una instrucción por ciclo, con excepción la instrucción de división.



Ejemplo de hardware real (II) Alpha 21064. Aceleración de la suma (y II)

- El sumador de las unidades de enteros y de coma flotante del microprocesador Alpha 21064 es de 64bits y realiza 2 sumas por ciclo de reloj ya que es segmentado de 2 etapas
- Se combinan tres métodos de suma binaria:
 - Propagación de acarreo en bloques de 8 bits
 - Selección de acarreo en 2 bloques de 32 bits
 - Anticipación de acarreo entre ambos bloques de 32 bits
- En todos los caminos de datos se han colocado latches de manera que el operador cuenta con dos etapas aisladas que permiten realizar dos operaciones por ciclo



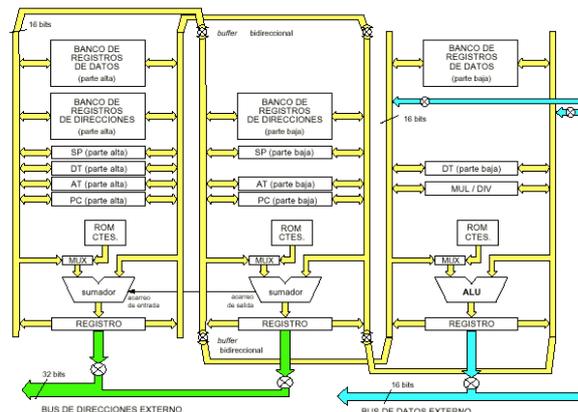
Ejemplo de hardware real (III) La unidad de ejecución del MC68000 (I)



- 8 registros de direcciones de 32 bits divididos en parte alta y parte baja en 2 bancos separados
- Operaciones sobre:
 - Direcciones pueden ser de 16 o de 32 bits
 - Datos de 8, 16 ó 32 bits.
- El conjunto de los registros esta organizado en 3 secciones de modo que se puedan realizar operaciones a la vez en cada una de las secciones.
- La UE posee una unidad que realiza operaciones especiales



Ejemplo de hardware real (y IV) La unidad de ejecución del MC68000 (y II)



Bibliografía

- Estructura y diseño de computadores
David A. Patterson y John L. Hennessy. Reverté, 2000
Capítulo 4
- Arquitectura de computadores. Un enfoque cuantitativo
John L. Hennessy y David A. Patterson. Mc Graw Hill, 3ª ed, 2002
Apéndices A: aritmética de computadores
- Organización y arquitectura de computadores
William Stallings. Prentice Hall. 1996
Capítulo 8

